

Beispiel: Betrachte die Kurven $C : Y^2 - X^3 = 0$ und $D : Y^2 - 2X^3 = 0$, sowie den einzigen Schnittpunkt $P = (0,0)$.

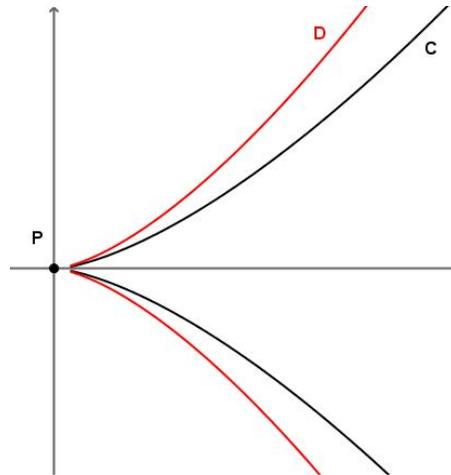


Abbildung 1: Schnittmultiplizität von C und D

Dann gilt für die Schnittmultiplizität:

$$I(C, D; P) = \text{Ord}_a(R_{f,g})$$

wobei

$$R_{f,g} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & X^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & X^3 \\ 1 & 0 & 2X^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2X^3 \end{pmatrix} = X^6$$

$X=0$ ist sechsfache Nullstelle von $R_{f,g}$. Also ist $I(C, D; P) = 6$. Für die Anzahl an Schnittpunkten der beiden Kurven gilt in diesem Fall also:

$$\sum_{P \in C \cap D} I(C, D; P) = 6$$

Graphisch wird dies auch deutlich, sobald man die beiden Kurven etwas stört:

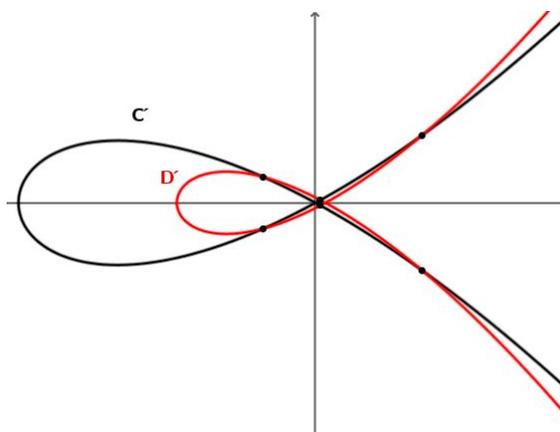


Abbildung 2: Störung von C und D zur Veranschaulichung der Schnittmultiplizität

Satz von Bézout: Seien C, D zwei algebraische Kurven ohne gemeinsame asymptotische Richtungen mit $\#C \cap D < \infty$. Dann gilt:

$$\sum_{P \in C \cap D} I(C, D; P) = \text{Grad}(C)\text{Grad}(D)$$

Beweis: Es seien $f, g \in \mathbb{C}[X, Y]$ zwei Polynome:

$$f = a_0 Y^d + a_1 Y^{d-1} + \dots + a_d \text{ mit } d = \text{Grad}(C) \text{ und } a_i \in \mathbb{C}[X]$$

$$g = b_0 Y^e + a_1 Y^{e-1} + \dots + a_e \text{ mit } e = \text{Grad}(D) \text{ und } b_i \in \mathbb{C}[X]$$

Für die Koeffizienten gelte außerdem:

$$a_0 \neq 0, \text{ Grad}(a_i) \leq i \text{ für alle } 0 \leq i \leq d$$

$$b_0 \neq 0, \text{ Grad}(b_i) \leq i \text{ für alle } 0 \leq i \leq e$$

Zeige nun, dass dann für den Grad der Resultante von f und g gilt: $\text{Grad}(R_{f,g}) = de$.
Stelle f und g dar als Summe homogener Polynome:

$$f = f_1 + \dots + f_d \text{ wobei } \text{Grad}(f_i) = i \text{ für alle } 0 \leq i \leq d$$

$$g = g_1 + \dots + g_e \text{ wobei } \text{Grad}(g_i) = i \text{ für alle } 0 \leq i \leq e$$

Die Leitterme ausgegeschrieben als homogene Polynome in X und Y haben dann folgende Gestalt:

$$f_d = \alpha_0 Y^d + \alpha_1 Y^{d-1} X + \dots + \alpha_d X^d \text{ mit } \alpha_i \in \mathbb{C} \text{ für alle } 0 \leq i \leq d$$

$$g_e = \beta_0 Y^e + \beta_1 Y^{e-1} X + \dots + \beta_e X^e \text{ mit } \beta_i \in \mathbb{C} \text{ für alle } 0 \leq i \leq e$$

Es gilt:

$$\alpha_0 = a_0 \neq 0 \text{ und } \beta_0 = b_0 \neq 0$$

Da f und g nach Voraussetzung keine gemeinsame Komponente haben, gilt dies auch für f_d und g_e . Damit ist $R_{f_d, g_e} \neq 0$. Berechne:

$$R_{f_d, g_e} = \det \left(\begin{array}{cccc} \alpha_0 & \alpha_1 X & \alpha_2 X^2 & \dots \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 X & \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \\ \dots & & & \\ \beta_0 & \beta_1 X & \beta_2 X^2 & \dots \\ 0 & \beta_0 & \beta_1 X & \\ 0 & 0 & \beta_0 & \\ \dots & & & \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \text{e Stück} \\ \text{'f-Block'}$$

Nutze Multilinearität der Determinante durch Multiplikation der i -ten Zeile des 'f-Blocks' mit X^{i-1} für $1 \leq i \leq e$ und der i -ten Zeile des 'g-Blocks' mit X^{i-1} für $1 \leq i \leq g$:

$$R_{f_d, g_e} = X^{-M} \det \left(\begin{array}{cccc} \alpha_0 & \alpha_1 X & \alpha_2 X^2 & \dots \\ 0 & \alpha_0 X & \alpha_1 X^2 & \\ 0 & 0 & \alpha_0 X^2 & \\ \dots & & & \\ \beta_0 & \beta_1 X & \beta_2 X^2 & \dots \\ 0 & \beta_0 X & \beta_1 X^2 & \\ 0 & 0 & \beta_0 X^2 & \\ \dots & & & \end{array} \right) \text{ mit } M = (1+2+\dots+(d-1))+(1+2+\dots+(e-1))$$

Nutze erneut die Multilinearität und ziehe Potenzen von X aus der Determinante:

$$R_{f_d, g_e} = X^{N-M} \det \left(\begin{array}{cccc} \alpha_0 & \alpha_1 X & \alpha_2 X^2 & \dots \\ 0 & \alpha_0 X & \alpha_1 X^2 & \\ 0 & 0 & \alpha_0 X^2 & \\ \dots & & & \\ \beta_0 & \beta_1 X & \beta_2 X^2 & \dots \\ 0 & \beta_0 X & \beta_1 X^2 & \\ 0 & 0 & \beta_0 X^2 & \\ \dots & & & \end{array} \right) \text{ mit } N = 1 + 2 + \dots + (d + e - 1)$$

Der Exponent von X entspricht gerade $\text{Grad}(R_{f_d, g_e})$:

$$\begin{aligned} \text{Grad}(R_{f_d, g_e}) &= N - M \\ &= (1 + 2 + \dots + (d + e - 1)) - ((1 + 2 + \dots + (d - 1)) + (1 + 2 + \dots + (e - 1))) \\ &= \frac{(d + e)(d + e - 1)}{2} - \frac{d(d - 1)}{2} - \frac{e(e - 1)}{2} \\ &= ed \end{aligned}$$

Da es sich bei R_{f_d, g_e} um den Leitterm von $R_{f, g}$ handelt, gilt ebenfalls:

$$\text{Grad}(R_{f, g}) = ed$$

Der Grad der Resultante von f und g entspricht gerade deren Schnitzzahl.

3.5 Knoten und Verschlingungen bei Singularitäten

Eine Kurve $C : f(X, Y) = 0$ ist definiert über eine komplexe Gleichung mit zwei komplexen Variablen: $C \subset \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$. Spaltet man sowohl die Gleichung, als auch die Variablen in Real- und Imaginärteil auf, so liefert die Kurve zwei reelle Gleichungen:

$$\operatorname{Re}(f) = 0$$

$$\operatorname{Im}(f) = 0$$

mit vier reellen Variablen $\operatorname{Re}(X), \operatorname{Im}(X), \operatorname{Re}(Y), \operatorname{Im}(Y)$.
 C ist also 2-dimensional im \mathbb{R}^4 .

Um C zu visualisieren, bedient man sich folgender Idee:
 Schneide C mit 3-dimensionaler Sphäre von Radius ϵ um den Ursprung:

$$S_\epsilon^3 = \{(X, Y) \in \mathbb{C}^2 : |X|^2 + |Y|^2 = \epsilon^2\} \subset \mathbb{C}^2$$

Oder aufgefasst als Teilmenge des \mathbb{R}^4 :

$$S_\epsilon^3 = \{(t, u, v, w) | t^2 + u^2 + v^2 + w^2 = \epsilon^2\} \subset \mathbb{R}^4$$

Zu einer Vorstellung der 3-Sphäre gelangt man über die Fortsetzung der von 1- und 2-Sphäre bekannten stereographischen Projektion. Diese impliziert, dass:

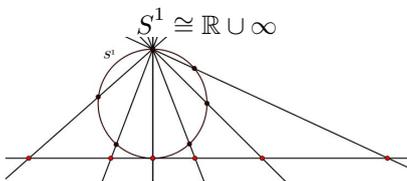


Abbildung 3: Stereographische Projektion der 1-Sphäre

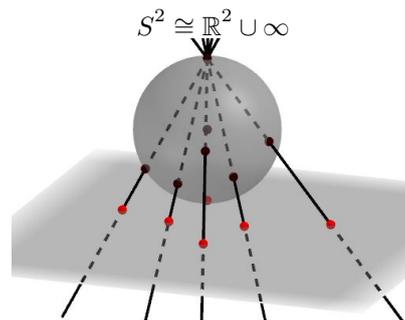


Abbildung 4: Stereographische Projektion der 2-Sphäre

Die logische Fortsetzung ergibt für S^3 also:

$$S^3 \cong \mathbb{R}^3 \cup \infty$$

Nimmt man zum 3-dimensionalen Raum noch einen unendlich weit entfernten Punkt dazu, so liefert dies eine anschauliche Vorstellung der 3-Sphäre.

Zur Betrachtung von $C \cap S_\epsilon^3$ wechseln wir in Kugelkoordinaten:

$$x = r e^{i\phi}, \quad y = s e^{i\Psi} \quad \text{wobei } r, s \geq 0; \quad 0 \leq \phi, \Psi \leq 2\pi$$

Als Gleichung für die 3-Sphäre erhalten wir damit:

$$|X|^2 + |Y|^2 = r^2 + s^2 = \epsilon^2$$

Wir werden sehen, dass sich die 3-Sphäre als Vereinigung von Tori darstellen lässt. Setze dazu:

$$T_{r,s} = \{(re^{i\phi}, se^{i\Psi}) : 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \Psi \leq 2\pi, r^2 + s^2 = \epsilon^2\} \subset S_\epsilon^3$$

Insbesondere ergibt sich:

$$T_{0,\epsilon} = \{(0, \epsilon e^{i\Psi}) : 0 \leq \Psi \leq 2\pi\}$$

$$T_{\epsilon,0} = \{(\epsilon e^{i\phi}, 0) : 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$$

Für verschiedene Werte der beiden Radien r und s ergeben sich folgende Bilder:

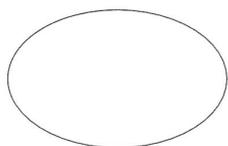


Abbildung 5: Torus für $s = 0$

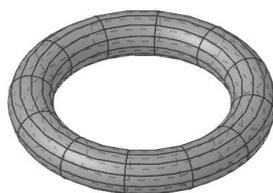


Abbildung 6: Torus für $0 < s < r$



Abbildung 7: Torus für $s = r$



Abbildung 8: Torus für $0 < r < s$



Abbildung 9: Torus für $r = 0$

Damit können wir nun schreiben:

$$S_\epsilon^3 = T_{\epsilon,0} \cup \bigcup_{\substack{s>0 \\ r^2+s^2=\epsilon^2}} T_{r,s} \cup T_{0,\epsilon}$$

Beispiele:

1. Wir betrachten die x-Achse als Kurve C, gegeben durch die Gleichung:

$$f(X, Y) = Y$$

$$C \cap S_\epsilon^3 = |X| = \epsilon = T_{\epsilon,0}$$

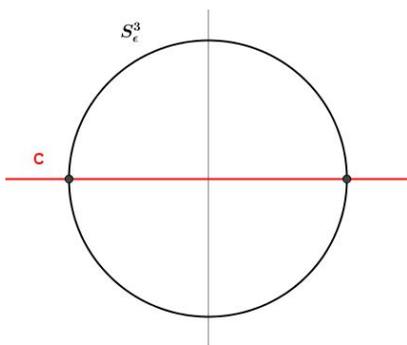


Abbildung 10: Schnittmenge im Reellen

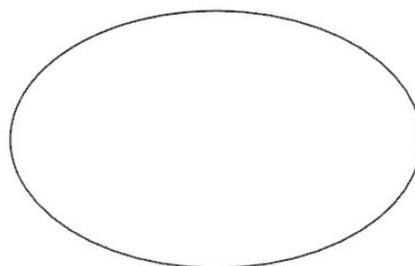


Abbildung 11: Schnittmenge auf Torus projiziert

2. Wir betrachten die Gerade C, gegeben durch die Gleichung:

$$f(X, Y) = Y - X$$

$$C \cap S_\epsilon^3 :$$

$$\begin{cases} r^2 + s^2 = \epsilon^2 \\ re^{i\phi} - se^{i\Psi} = 0 \end{cases} \Rightarrow r = s, \phi = \Psi \text{ mod } 2\pi$$

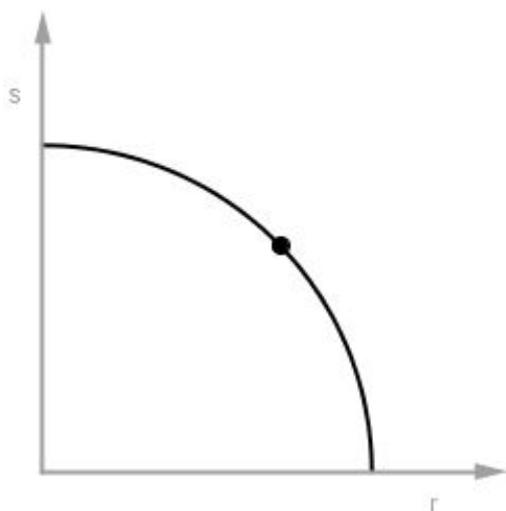


Abbildung 12: r-s-Diagramm

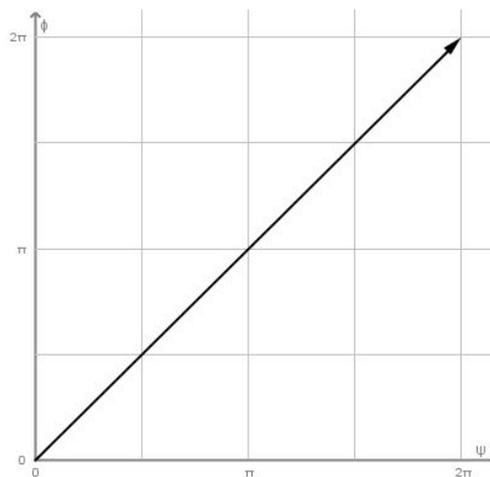


Abbildung 13: $\Psi - \phi$ -Diagramm

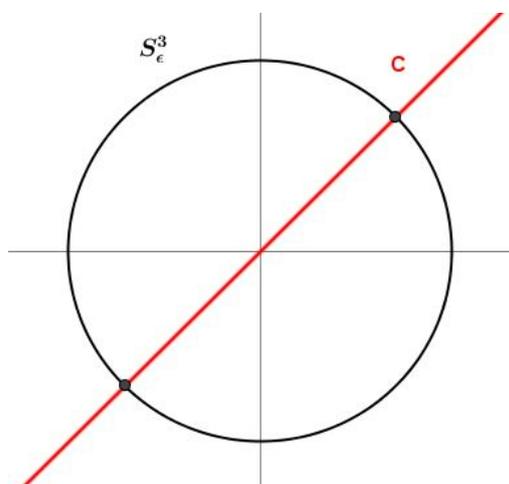


Abbildung 14: Schnittmenge im Reellen

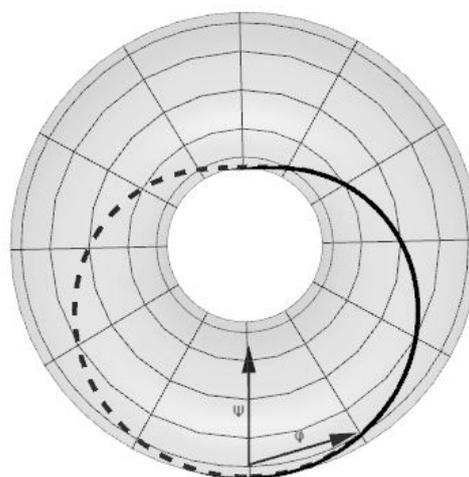


Abbildung 15: Schnittmenge auf Torus projiziert

3. Wir betrachten die Doppelgerade C , gegeben durch die Gleichung:

$$f(X, Y) = Y^2 - X^2$$

$$C \cap S_\epsilon^3 :$$

$$\begin{cases} r^2 + s^2 = \epsilon^2 \\ r^2 e^{i2\phi} - s^2 e^{i2\Psi} = 0 \end{cases} \Rightarrow r = s, \phi = \Psi \text{ mod } 2\pi \text{ oder } \phi = \Psi + \pi \text{ mod } 2\pi$$

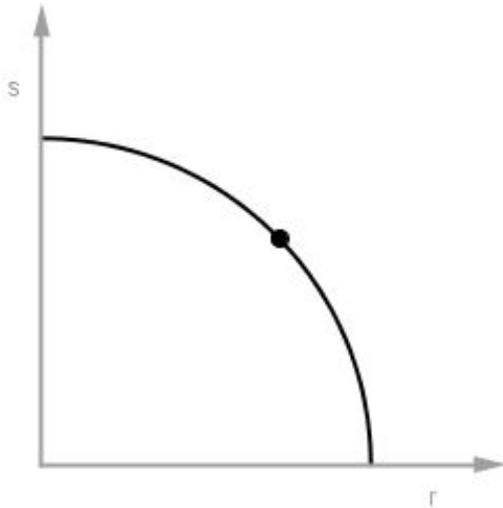


Abbildung 16: r-s-Diagramm

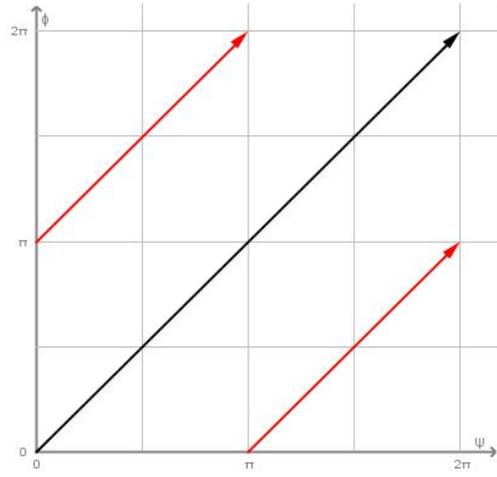


Abbildung 17: $\Psi - \phi$ -Diagramm

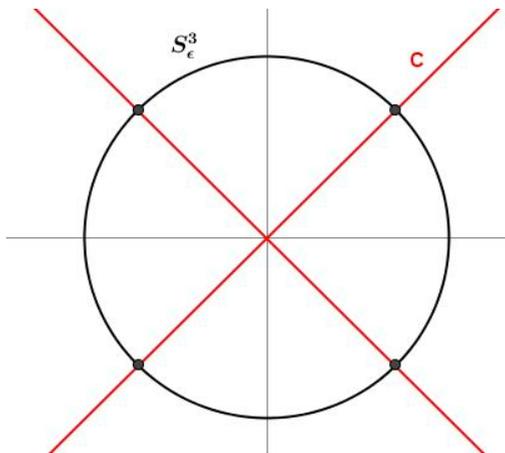


Abbildung 18: Schnittmenge im Reellen

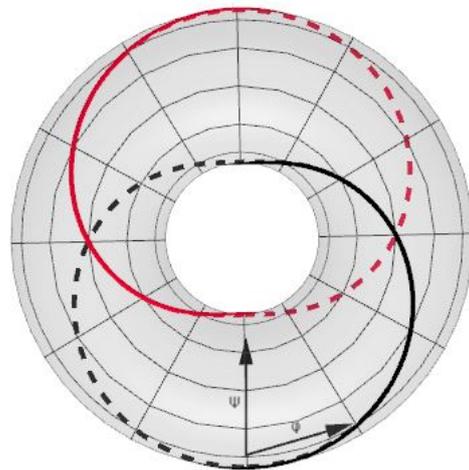


Abbildung 19: Schnittmenge auf Torus projiziert

4. Durch eine kleine Variation von Beispiel 2 erhalten wir eine neue Kurve C , gegeben durch die Gleichung:

$$f(X, Y) = Y - e^{i\alpha} X$$

$$C \cap S_\epsilon^3 :$$

$$\begin{cases} r^2 + s^2 = \epsilon^2 \\ re^{i\phi} - se^{i\Psi} = 0 \end{cases} \Rightarrow r = s, \Psi = \phi + \alpha \text{ mod } 2\pi$$

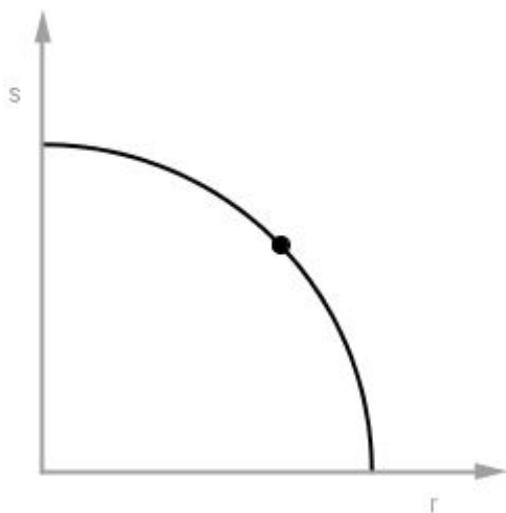


Abbildung 20: r-s-Diagramm

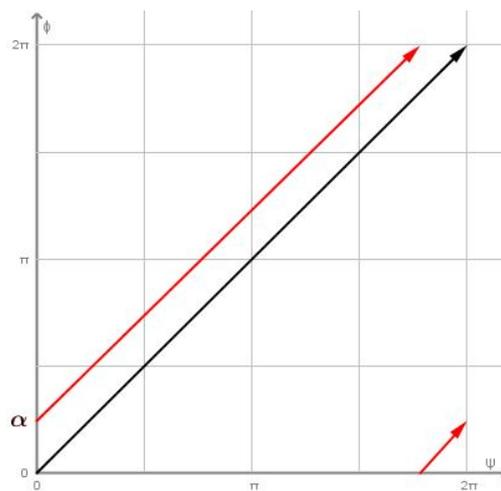


Abbildung 21: $\Psi - \phi$ -Diagramm

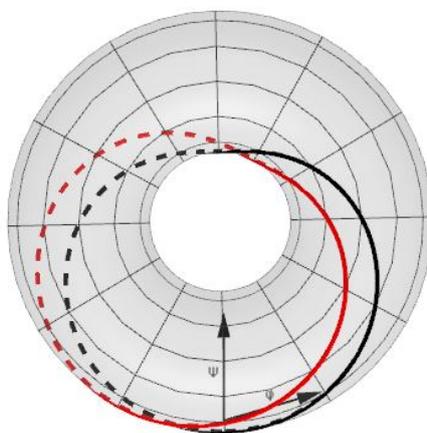


Abbildung 22: Schnittmenge auf Torus projiziert

Mit zunehmendem Parameter α vergrößert sich der Abstand der veränderten Kurve (rot) zur ursprünglichen Kurve (schwarz).

5. Wir betrachten die Kurve C , gegeben durch die Gleichung:

$$f(X, Y) = Y^2 - X^3$$

$C \cap S_\epsilon^3$:

$$\begin{cases} r^2 + s^2 = \epsilon^2 \\ s^2 e^{i2\Psi} - r^3 e^{i3\phi} = 0 \end{cases} \Rightarrow s^2 = r^3, 2\Psi = 3\phi \pmod{2\pi}$$

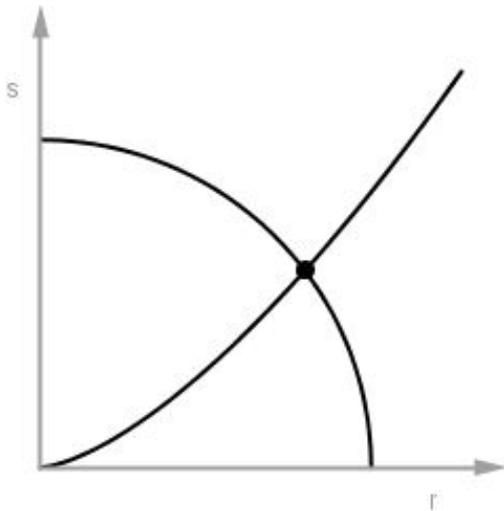


Abbildung 23: r-s-Diagramm

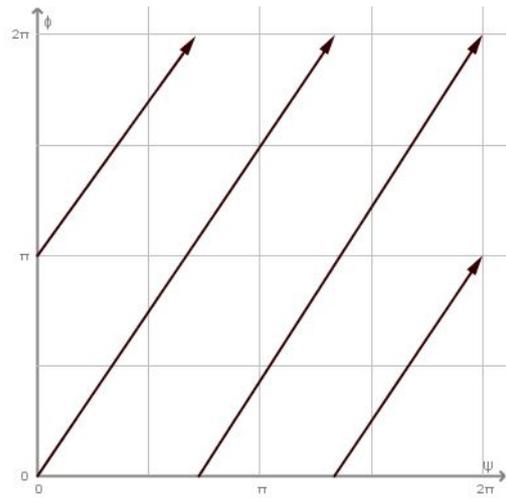


Abbildung 24: $\Psi - \phi$ -Diagramm

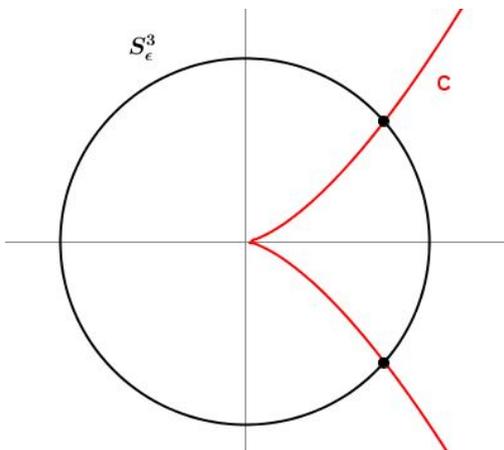


Abbildung 25: Schnittmenge im Reellen

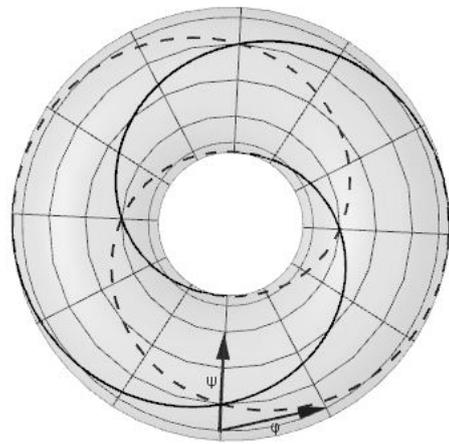


Abbildung 26: Schnittmenge auf Torus projiziert (Kleeblattschlinge)

6. Wir betrachten die Kurve C, gegeben durch die Gleichung:

$$f(X, Y) = Y^2 - X^4$$

$$C \cap S_\epsilon^3 :$$

$$\begin{cases} r^2 + s^2 = \epsilon^2 \\ s^2 e^{i2\Psi} - r^4 e^{i4\phi} = 0 \end{cases} \Rightarrow s^2 = r^4, \Psi = 2\phi \text{ mod } 2\pi \text{ oder } \Psi = 2\phi + \pi \text{ mod } 2\pi$$

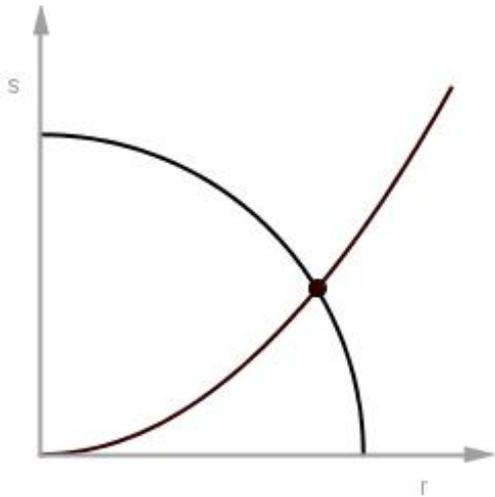


Abbildung 27: r-s-Diagramm

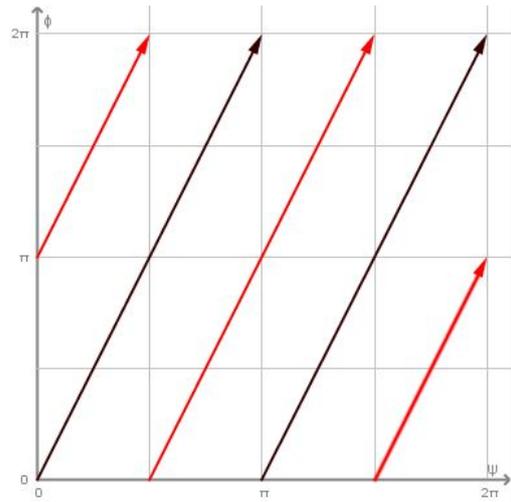


Abbildung 28: $\Psi - \phi$ -Diagramm

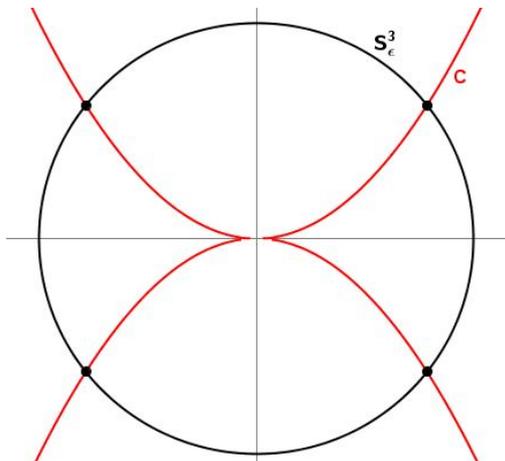


Abbildung 29: Schnittmenge im Reellen

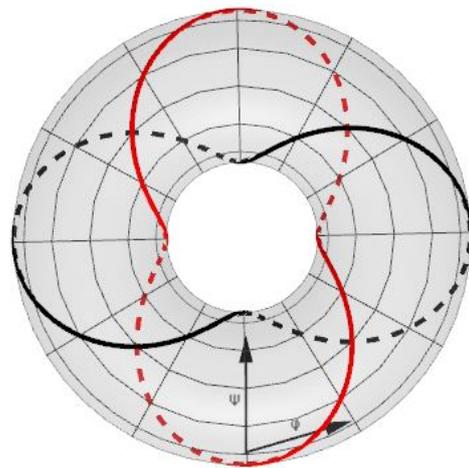


Abbildung 30: Schnittmenge auf Torus projiziert

7. Wir betrachten die Kurve C , gegeben durch die Gleichung:

$$f(X, Y) = Y^2 - X^5$$

$$C \cap S_\epsilon^3 :$$

$$\begin{cases} r^2 + s^2 = \epsilon^2 \\ s^2 e^{i2\Psi} - r^5 e^{i5\phi} = 0 \end{cases} \Rightarrow s^2 = r^5, 2\Psi = 5\phi \pmod{2\pi}$$

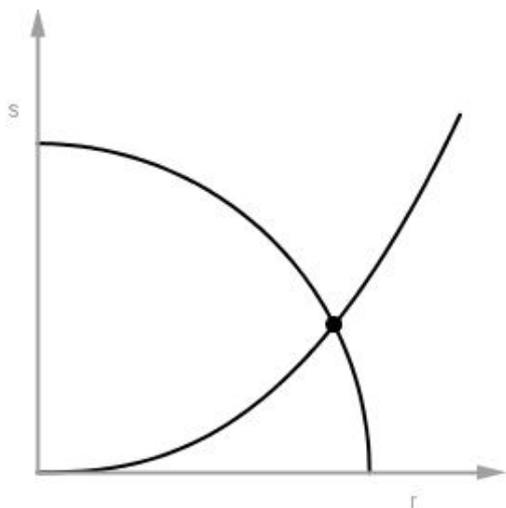


Abbildung 31: r-s-Diagramm

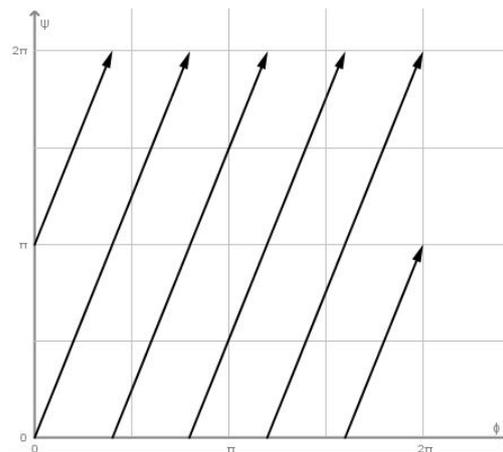


Abbildung 32: $\Psi - \phi$ -Diagramm

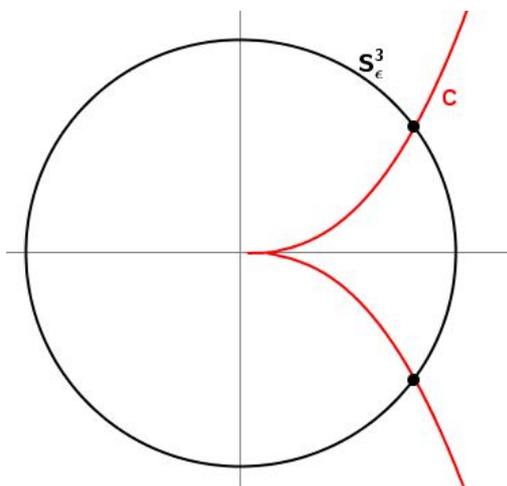


Abbildung 33: Schnittmenge im Reellen

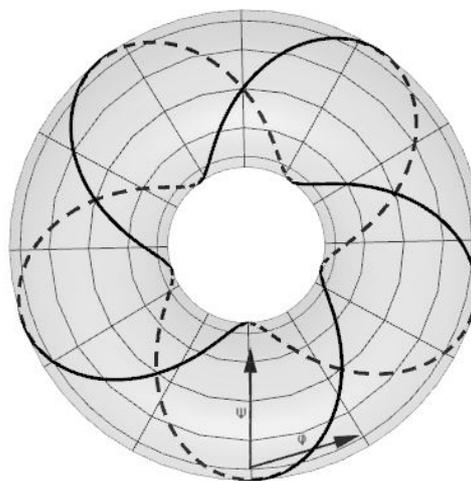


Abbildung 34: Schnittmenge auf Torus projiziert

8. Wir betrachten die Kurve C, gegeben durch die Gleichung:

$$f(X, Y) = Y^3 - X^4$$

$C \cap S_\epsilon^3$:

$$\begin{cases} r^2 + s^2 = \epsilon^2 \\ s^3 e^{i2\Psi} - r^4 e^{i5\phi} = 0 \end{cases} \Rightarrow s^3 = r^4, 3\Psi = 4\phi \text{ mod } 2\pi$$

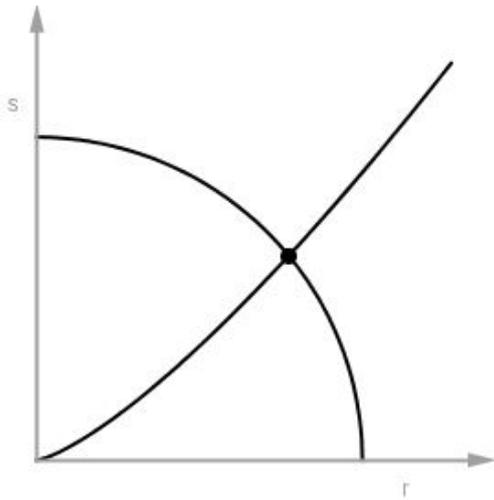


Abbildung 35: r-s-Diagramm

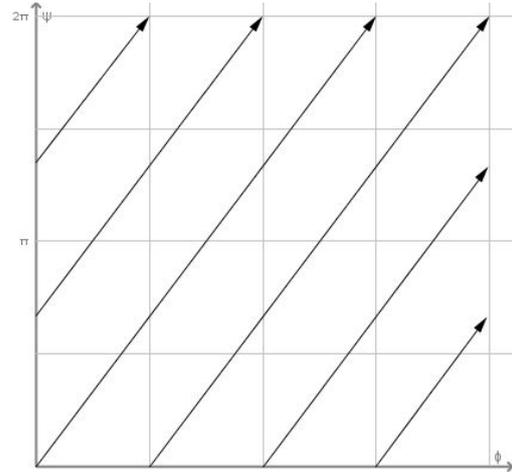


Abbildung 36: $\Psi - \phi$ -Diagramm

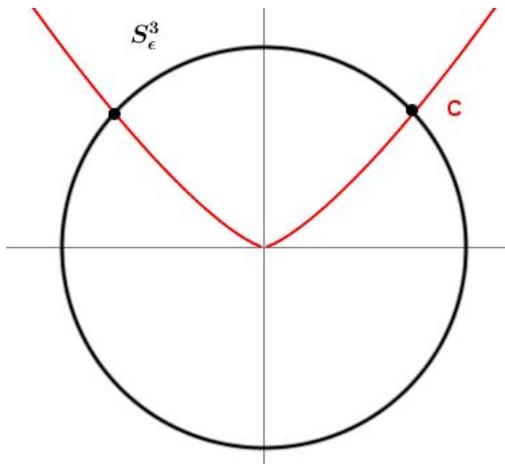


Abbildung 37: Schnittmenge im Reellen

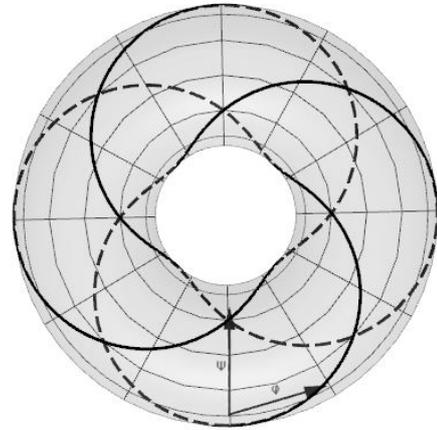


Abbildung 38: Schnittmenge auf Torus projiziert

Alternative Behandlung:

Betrachten wir erneut Beispiel 5 mit $C : Y^2 - X^3 = 0$ über einen anderen Zugang. Wähle $r=1$, damit ist:

$$x = e^{i\phi} \text{ und } y^2 = e^{3i\phi} \text{ mit } 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

X liegt dann auf dem Einheitskreis in der komplexen Ebene. Stelle X in der Papierebene dar. Für verschiedene Werte von ϕ betrachten wir dann den Wert von Y, indem wir ihn in einer gesonderten Ebene darstellen.

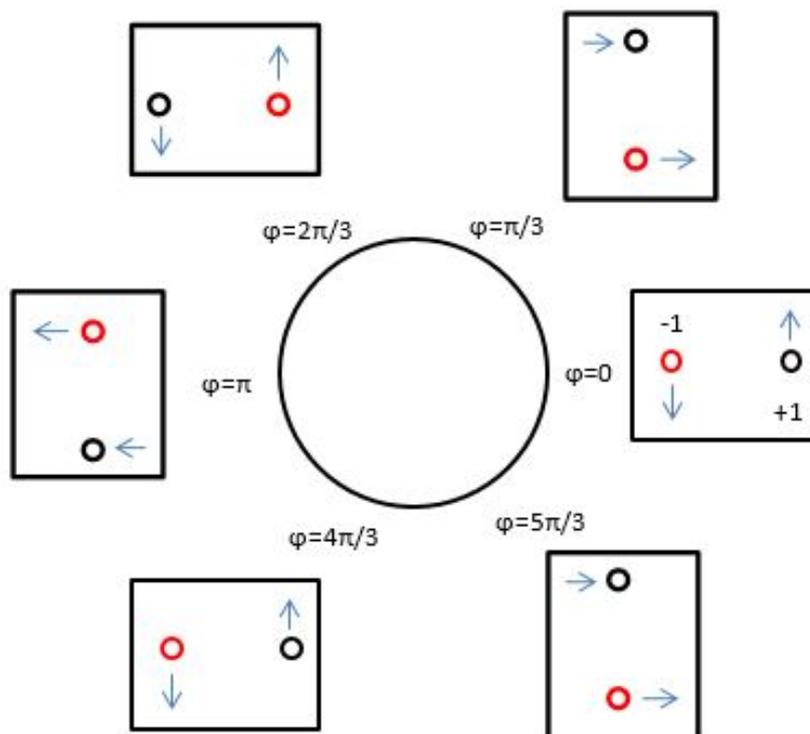


Abbildung 39: Alternative Darstellungsmöglichkeit

Satz:

1. Die Gauss'sche Verschlingungszahl V sei:

$$V(k_1, k_2) = \frac{1}{4\pi} \iint_{k_1 \times k_2} \frac{(\vec{u} - \vec{v})}{|\vec{u} - \vec{v}|^3} \cdot (\vec{d}u) \times \vec{d}v \in \mathbb{Z} \text{ für alle } k_1, k_2 \subset \mathbb{R}^3$$

Dann ist die Schnittmultiplizität zweier algebraischer Kurven C und D:

$$I(C, D; P) = V(C \cap S_\epsilon^3, D \cap S_\epsilon^3)$$

Die Ausführung des Beweises ist Teil der Topologievorlesung.

2. Schneidet man zwei algebraische Kurven C und D jeweils mit der 3-Sphäre und stellt sich die auf den Torus projizierten Bilder als 'Fäden' vor, so nennt man die Anzahl der Überkreuzungen beider Fäden beim 'Auseinanderziehen' die gordische Zahl. Diese ist wiederum gleich der Schnittmultiplizität $I(C, D; P)$.